

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

MUHARREM AKYOL

KOCAELİ 2022

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

MUHARREM AKYOL

Prof. Dr. Ali DEMİR
Danışman, Kocaeli Üniv.

.....

Prof. Dr. Metin YAMAN
Jüri Üyesi, Sakarya Üniv.

.....

Doç. Dr. Mine Aylin BAYRAK
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.

.....

Dr. Öğr. Üyesi Sertaç ERMAN
Eş Danışman, Sakarya Uygulamalı Bilimler Üniv.

Enstitü Yönetim Kurulunun
18/09/2019 tarih ve 2019/33 nolu
toplantısında II. tez danışmanı
olarak atanmıştır.

Tezin Savunulduğu Tarih: 28.06.2022

ETİK BEYAN VE ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ

Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez/proje çalışmada,

- Bu tezin/projenin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu,
- Çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı,
- Bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi,
- Bu çalışmanın Kocaeli Üniversitesi'nin abone olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun olduğunu,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Tezin/Projenin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez/proje çalışması olarak sunmadığımı,

beyan ederim.



Bu tez/proje çalışmasının herhangi bir aşaması hiçbir kurum/kuruluş tarafından maddi/alt yapı desteği ile desteklenmemiştir.



Bu tez/proje çalışması kapsamında üretilen veri ve bilgiler tarafından no'lu proje kapsamında maddi/alt yapı desteği alınarak gerçekleştirilmiştir.

Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

(İmza)

Muharrem AKYOL

YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI

Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/projemin tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda belirtilen koşullarla kullanıma açma izninin Kocaeli Üniversitesi'ne verdiğimi beyan ederim. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin/projemin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanımı bana ait olacaktır.

Tezin/projenin kendi özgün çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin/projenin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim kurulu tarafından yayınlanan **“Lisanüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge”** kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricinde YÖK Ulusal Tez Merkezi/ Kocaeli Üniversitesi Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- ☐ Enstitü yönetim kurulu kararı ile tezimin/projemin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.
- ☐ Enstitü yönetim kurulu gerekçeli kararı ile tezimin/projemin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 6 ay ertelenmiştir.
- ☒ Tezim/projem ile ilgili gizlilik kararı verilmemiştir.

(İmza)

Muharrem AKYOL

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Son yıllarda üzerinde çok fazla çalışma yapılan kesirli diferansiyel denklem problemlerinin çözümü farklı yaklaşımlarla bulunmuş olup bu çözümler aracılığıyla da var olan sorunların daha iyi analiz edildiği gözlemlenmiştir.

Beni bu konuya yönlendiren ve hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ali Demir'e, eş danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Sertaç Erman'a, Araş. Gör. Süleyman Çetinkaya'ya çok teşekkür ederim. Yine bana göstermiş oldukları sabır, maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme çok teşekkür ederim.

Haziran – 2022

Muharrem AKYOL



İÇİNDEKİLER

ETİK BEYAN VE ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ	i
YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
TABLolar DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
1. GİRİŞ	1
2. KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREV	3
2.1. Kesirli Mertebeden Türev Sorularında Kullanılacak Fonksiyon Çeşitleri	3
2.1.1. Gamma Fonksiyonu	3
2.1.2. Beta Fonksiyonu	5
2.1.3. Hata Fonksiyonu (erf)	7
2.1.4. Anger Fonksiyonu (Anger J)	8
2.1.5. Mittag-Leffler Fonksiyonu	8
2.1.6. Wright Fonksiyonu	10
2.2. Kesirli Mertebeden Türev Alma Yöntemleri	10
2.2.1. Euler Tanımı	11
2.2.2. Grünwald-Letnikov Tanımı	11
2.2.3. Riemann-Liouville Tanımı	11
2.2.4. Caputo Tanımı	12
2.3. Kesirli Mertebeden Türev Örnekleri	12
2.4. Kesirli Mertebeden Türevlerin Özellikleri	19
2.4.1. Lineerlik	19
2.4.2. Homojenlik	19
2.4.3. Birleşme	19
2.4.4. Leibniz	20
2.5. Kesirli Mertebeden Türevlerin Laplace Dönüşümleri	20
2.5.1. Grünwald-Letnikov Kesirli Mertebeden Türevin Laplace Dönüşümü	20
2.5.2. Riemann-Liouville Kesirli Mertebeden Türevin Laplace Dönüşümü	20
2.5.3. Caputo Kesirli Mertebeden Türevin Laplace Dönüşümü	21
2.6. Kesirli Mertebeden Türevlerin Fourier Dönüşümü	21
3. KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE UYGULAMALARI	22
3.1. Kesirli Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklemler	22
3.1.1. Örnekler	23
3.2. Sıralı Zaman Kesirli Dalga Denklemini İçeren Matematik Probleminin Çözümü	25
3.2.1. Örnekler	28

3.3. Bazı Kesirli Fonksiyonların Kesirli Türevleri ve Uygulamaları	30
3.3.1. Örnekler	36
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	40
KAYNAKLAR	41
KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER	43
ÖZGEÇMİŞ	44



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	Gamma fonksiyonunun grafiği	4
Şekil 2.2.	Pozitif x ve y değerleri için beta fonksiyonunun grafiği	6
Şekil 2.3.	Hata fonksiyonunun grafiği	7
Şekil 2.4.	Mittag-Leffler fonksiyonu	9



TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 2.1. Gamma fonksiyonunun sayısal değerleri	5
--	---



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\text{AngerJ}(v,x)$	: AngerJ fonksiyonu
$B(x,y)$	: Beta fonksiyonu
$\frac{d^q f(x)}{dx^q}$	: Riemann-Liouville tanımı
$\frac{d^n x^m}{dx^n}$	: Euler tanımı
$D_t^p f(t)$	: Grünwald-Letnikov tanımı
$D_x^\mu f(x)$	: Caputo tanımı
$E_\alpha(z)$	: Tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}(z)$	: İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$\text{erfc}(x)$	: Tamamlayıcı hata fonksiyonu
$\text{erf}(x)$	: Hata fonksiyonu
e^z	: Üstel fonksiyon
$L\{f(t)\}$	: $f(t)$ 'nin Laplace dönüşümü
$\text{Re}(x)$	: x kompleks sayısının reel kısmı
$u(t)$	: Diferansiyel denklemin genel çözümü
$u(x, t; \alpha)$	: Dalga denkleminin bir çözümü
$W(z;\alpha,\beta)$	: Wright fonksiyonu
$\phi(x)$	: Fi fonksiyonu
$\Gamma(x)$	: Gamma fonksiyonu
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
ξ	: Ksi
λ	: Lamda
μ	: Mü
$\Psi(x)$	: Psi
θ	: Teta
Σ	: Toplam sembolü

Kısaltmalar

FDE	: Functional Differential Equation (Fonksiyonel Diferansiyel Denklem)
ODE	: Ordinary Differential Equation (Adi Diferansiyel Denklem)

KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

ÖZET

Bu tez çalışmasında genel olarak diferansiyel denklemlerde kullanılan çözüm yöntemlerinin kesirli diferansiyel denklemlerde de uygulanabildiği üzerinde durulmuştur. İlk olarak kesirli mertebeden türevin geçmişten günümüze doğru gelişi ve günlük hayatta nerelerde kullanılacağı hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonrasında kesirli mertebeden türev sorularında kullanılacak fonksiyon çeşitlerine ve yöntemlerine yer verilmiştir. Bu yöntemlerle kesirli mertebeden türev uygulamalarına alternatif çözümler getirilmiştir. Ayrıca kesirli mertebeden türev alma yöntemlerinin özellikleri, Laplace dönüşümleri ve Fourier dönüşümleri karşılaştırılmıştır. Kesirli mertebeden sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemlerin tanımına ve örneklerine yer verilmiş olup çözülen uygulamalardan kesirli mertebeden türev yönteminden biri olan Caputo türev tanımını kullanmanın diğer tanımlara oranla daha iyi sonuçlar verdiği belirtilmiştir. Caputo diferansiyel denklemlerin çözümlerinin de üzerinde durulmuştur. Son olarak da Dirichlet sınır ve başlangıç koşullarına tabi ardışık zaman kesirli dalga denkleminin değişkenlerin ayrılması yöntemi ile analitik çözümü oluşturulmuş olup buna ilaveten de sabit katsayılarla sahip homojen olmayan FDE'nin özel çözümü bulunmuştur. Analitik çözüm, kesirli trigonometrik fonksiyonlar açısından seri biçiminde oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Caputo Kesirli Türevi, Kesirli Diferansiyel Denklemler, Kesirli Trigonometrik Fonksiyon, Mittag-Leffler Fonksiyonu, Zaman Kesirli Dalga Denklemi.

FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABSTRACT

In this thesis, it is general focused on the applicability of solution methods, used in differential equations, on fractional differential equations. Firstly, the development of fractional derivative from past to present and its applications in daily life are presented. Secondly, the types of functions and methods, used in fractional order derivative questions, are presented. By these methods, alternative solutions are obtained for applications of fractional derivative. Moreover properties of fractional derivative methods are compared with Laplace transforms and Fourier transforms. Finally, the definition and examples of fractional linear homogeneous differential equations with constant coefficients are exhibited. Furhtermore, it is emphasized that the outomes of fractional differential equations in Caputo sense are better than the ones of fractional differential equations in other senses. As a result, it is focused on the solutions of fractional differential equations in Caputo sense. Finally, the analytic solution of the time fractional wave equation subject to the Dirichlet boundary and initial conditions is constructed by the seperation of variables. In addition, a special solution of the inhomogeneous FDE with constant coefficients is obtained. The analytic solution is constructed in series form in terms of fractional trigonometric functions.

Keywords : Caputo Fractional Derivative, Fractional Differential Equations, Fractional Trigonometric Function, Mittag-Leffler Function, Time Fractional Wave Equation.

1. GİRİŞ

Günümüzde farklı sorunların ortaya çıkması farklı çözümleri de beraberinde getirmiştir. Kesirli diferansiyel denklemler de günümüzde var olan problemlerin çözümü için alternatif bir çözüm olmaktan öte problemlerin doğurduğu sonuçlar hakkında daha sağlıklı yorumlar yapmamızı sağlar. Bu sebepten dolayı da birçok problemin çözümüne katkısı oldukça büyüktür.

Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan kesirli mertebeden türev tanımlarını ve bu tanımlarda geçen fonksiyon çeşitlerini bilmek de son derece önem arz etmektedir. Kesirli mertebeden türev ile aslında ifade edilen herhangi bir mertebeden türevdir. Biz de bu kapsamda genel olarak tam sayı olmayan, pozitif mertebeden türevlerle ilgileneceğiz.

Bu tezde ilk olarak kesirli mertebeden türev örneklerine yer verilmiştir.

Sonrasında, (1.1) denklemi için,

$$\begin{cases} D^{2q}u(t) + BD^qu(t) + Cu(t) = 0 \\ u(t_0) = 0, D^qu(t_0) = u_0^q \end{cases} \quad (1.1)$$

koşullarına sahip kesirli mertebeden sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemlerinin (Sambandham ve Vatsala, 2015), genel çözümü Mittag-Leffler fonksiyonu aracılığıyla bulunmuştur.

Daha sonra ise,

$$\begin{cases} D_t^{2\alpha}u = c^2u_{xx}, 0 < x < 1, 0 < \alpha < 1 \\ u(x, 0) = \phi(x), D_t^\alpha u(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Dirichlet sınır ve başlangıç koşullarına tabii dalga denklemi probleminin (Akyol ve diğ., 2021), analitik çözümü değişkenlerine ayırma yöntemiyle bulunmuştur.

Son olarak da, sabit katsayılarla sahip homojen olmayan FDE(Functional Differential Equation)'nin özel çözümünü bulmak amaçlanmıştır. Bölüm 3.3.'te sabit katsayılarla

sahip homojen olmayan FDE'nin özel çözümü kesirli diferansiyel operatör yöntemi aracılığıyla bulunmuştur.

Bu tezde sonuç olarak, farklı tipte verilen kesirli diferansiyel denklemlerin genel çözümünü bulmak amaçlanmıştır.



2. KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREV

Kesirli mertebeden türev kavramı tam sayılı mertebeden türev kavramı kadar eski bir geçmişe sahiptir. Geçmişten günümüze, verilen bir ifadenin birinci, ikinci, üçüncü v.b. tam sayılı mertebeden türevi (Çavuş, 2006), bulunabiliyordu. İnsanoğlunun kafasındaki bu soru işaretleri kesirli mertebeden türev almayı kaçınılmaz bir hale getirmiştir. Kesirli mertebeden türev ifadesi 1695 yılında Leibniz'in L'Hospital yazdığı bir mektupta gün yüzüne çıkmıştır. Leibniz'in L'Hospital'a yönelttiği " Tam sayılı mertebeden (basamaktan) türevler kesirli mertebeden türevlere genişletilebilir mi?" sorusu (Çavuş, 2006), ile kesirli mertebeden türev konusu derinlik kazanmaya başlamıştır. Yani bir fonksiyonun $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$ v.b. mertebeden kesirli türevini bulmak üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Leibniz'in çalışmalarıyla birlikte kesirli mertebeden türev konusunda birçok bilim adamı da katkı sağlamıştır. Liouville, Riemann, Weyl, Lagrange, Laplace, Fourier, Euler ve Abel (Çavuş, 2006), kesirli mertebeden türev konusunda çalışmaları olan bilim adamlarından bazılarıdır.

Kesirli mertebeden türev fizik, biyoloji, matematik ve kontrol mühendisliği gibi mühendislik mesleğinin birçok alanında (Değerli, 2018), aktif bir şekilde kullanımı mevcuttur.

2.1. Kesirli Mertebeden Türev Sorularında Kullanılacak Fonksiyon Çeşitleri

2.1.1. Gamma Fonksiyonu

$\Gamma(x)$ ile göstereceğimiz gamma fonksiyonu Mittag-Leffler ve Wright fonksiyonunda, Euler, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli mertebeden türev tanımlarında sık kullanılan bir fonksiyondur.

Genel olarak gamma fonksiyonu (Chaudhry ve diğ., 1997),

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

genelleştirilmiş integraliyle bulunur. n doğal sayı olmak üzere $\Gamma(x)$ eşitliğinden,

$$n! = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt$$

integral eşitliği elde edilir. Bu yüzden de gamma fonksiyonu (Soytaş, 2006), faktöriyel fonksiyonu olarak da adlandırılabilir.

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \text{ genelleştirilmiş integraliyle,}$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^{n+1-1} e^{-t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt$$

$$= n!$$

$$= n(n-1)!$$

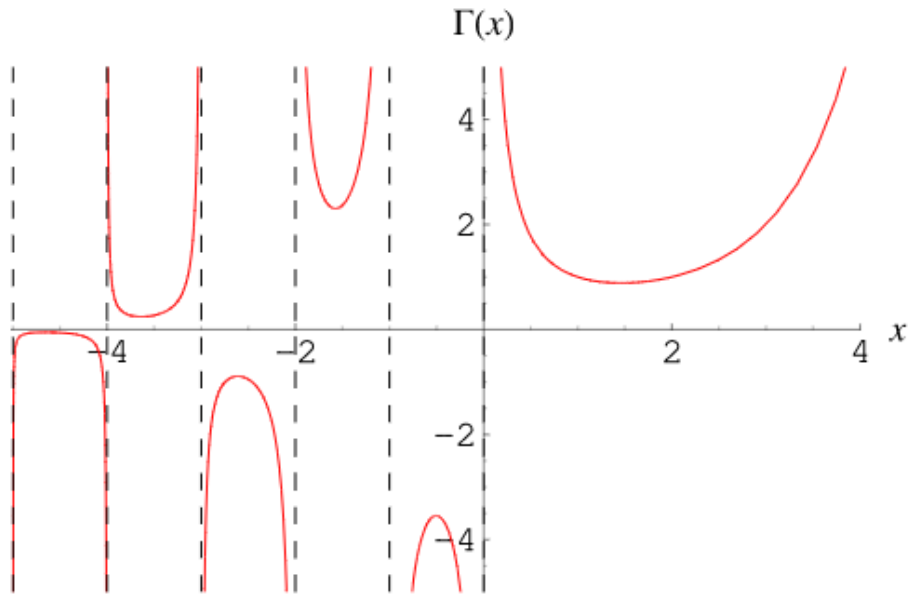
$$= n \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$$

$$= n \cdot \Gamma(n)$$

(2.2)

(Soytaş, 2006) bulunur.

Gamma fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.1. Gamma fonksiyonunun grafiği (mathworld.wolfram.com)

Kesirli mertebeden türev uygulamalarında kullanılacak Gamma fonksiyonuna ilişkin sayısal değerler aşağıdaki tablodaki gibidir.

Tablo 2.1. Gamma fonksiyonunun sayısal değerleri

$\Gamma(0)$	Tanımsız
$\Gamma(\frac{1}{2})$	$\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1)$	1
$\Gamma(\frac{3}{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(2)$	1
$\Gamma(\frac{5}{2})$	$\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(3)$	2
$\Gamma(\frac{7}{2})$	$\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(4)$	6
$\Gamma(5)$	24
$\Gamma(\infty)$	∞
$\Gamma(-\frac{1}{2})$	$-2\sqrt{\pi}$
$\Gamma(-\frac{3}{2})$	$\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$

2.1.2. Beta Fonksiyonu

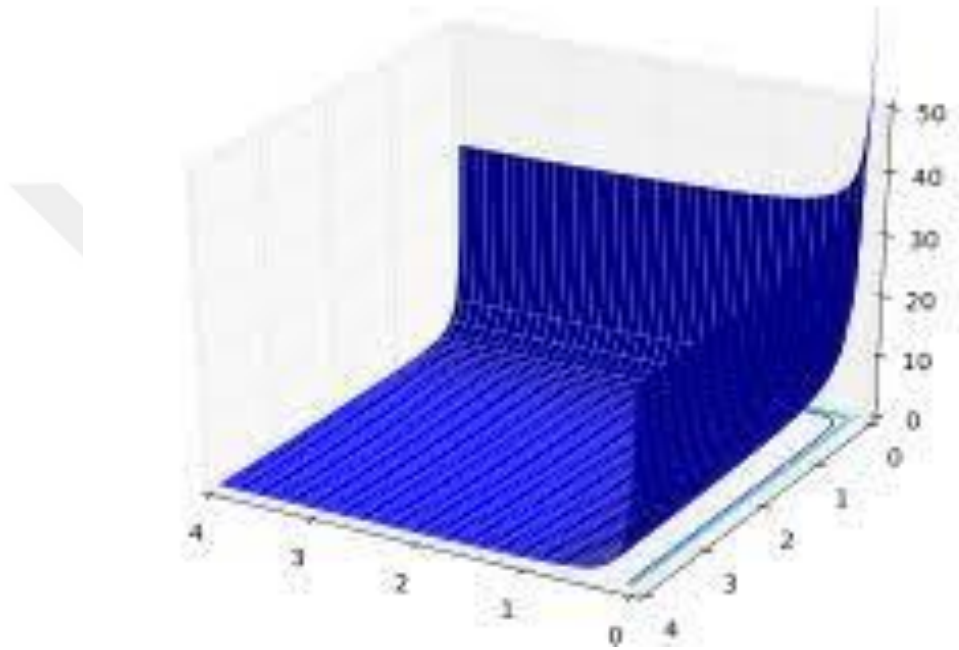
Beta fonksiyonunu özellikle Riemann-Liouville ve Caputo türev tanımlarının uygulamalarında görmek mümkündür.

Beta fonksiyonu genel olarak,

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \text{Re}(x) > 0, \text{Re}(y) > 0 \quad (2.3)$$

(Chaudhry ve diğ., 1997), şeklinde tanımlanır.

Pozitif x ve y değerleri için beta fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.2. Pozitif x ve y değerleri için beta fonksiyonunun grafiği (tr.wikipedia.org)

Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasındaki bağıntı uygulamaların çözümünü basitleştirmiştir.

Buna göre,

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \\ &= \frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{\Gamma(q+p)} \\ &= B(q, p) \end{aligned} \quad (2.4)$$

(Çavuş, 2006), şeklindedir. (2.4)'te ki ifade Beta fonksiyonunun en bilinen özelliklerinden biridir.

O halde, beta fonksiyonu değişme özelliğini sağlar.

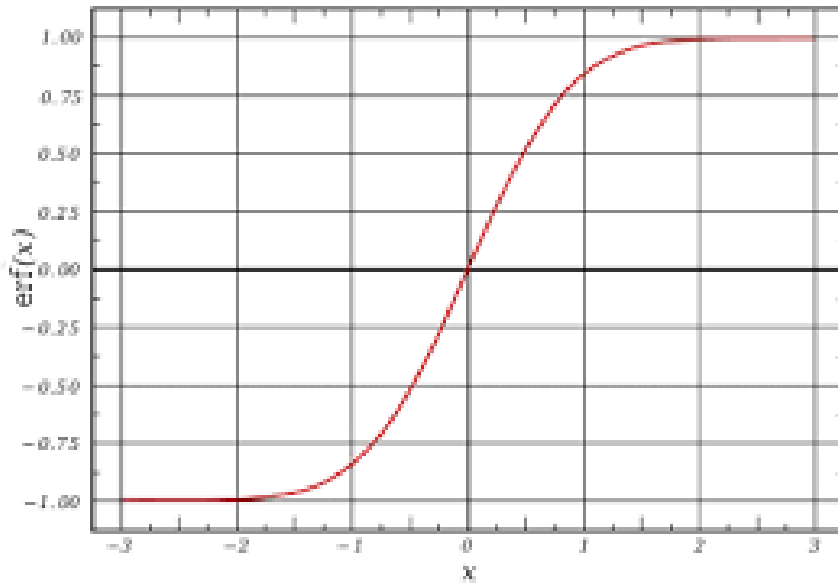
2.1.3. Hata Fonksiyonu (erf)

Hata fonksiyonu $\text{erf}(x)$ ile gösterilir. Aşağıda verilen integral eşitliğiyle de (Soytaş, 2006),

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (2.5)$$

hata fonksiyonunun değerleri bulunur. Aynı zamanda hata fonksiyonu tek fonksiyon çeşididir.

Hata fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.3. Hata fonksiyonunun grafiği (tr.wikipedia-on-ipfs.com)

Hata fonksiyonunun özellikleri ve alabileceği değerler (Soytaş, 2006), aşağıdaki gibi verilebilir.

- 1) $\text{erf}(x) = 1 - \text{erfc}(x)$ ($\text{erfc}(x)$ tamamlayıcı hata fonksiyonu)
- 2) $\text{erf}(-x) = -\text{erf}(x)$
- 3) $\text{erf}(-\infty) = -1$
- 4) $\text{erf}(-3) = -1$
- 5) $\text{erf}(-2) = -1$
- 6) $\text{erf}(0) = 0$

- 7) $\text{erf}(2) = 1$
- 8) $\text{erf}(3) = 1$
- 9) $\text{erf}(\infty) = 1$

2.1.4. Anger Fonksiyonu (Anger J)

Homojen olmayan Bessel denklemlerinin çözümünde AngerJ(v,x) fonksiyonu kullanılır. Özellikle trigonometrik ve üstel fonksiyonların kesirli mertebeden türevlerinde kullanılır.

Genel olarak,

$$xy'' + xy' + (x - v)y = \frac{(x-v) \sin(v\pi)}{\pi} \quad (2.6)$$

(Soytaş, 2006), bağıntısı ile verilir.

Ayrıca,

$$J_v(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(v\theta - z \sin\theta) d\theta \quad (2.7)$$

(Caratelli, 2019), genelleştirilmiş integrali aracılığıyla da Anger fonksiyonunun değerleri bulunabilir.

2.1.5. Mittag-Leffler Fonksiyonu

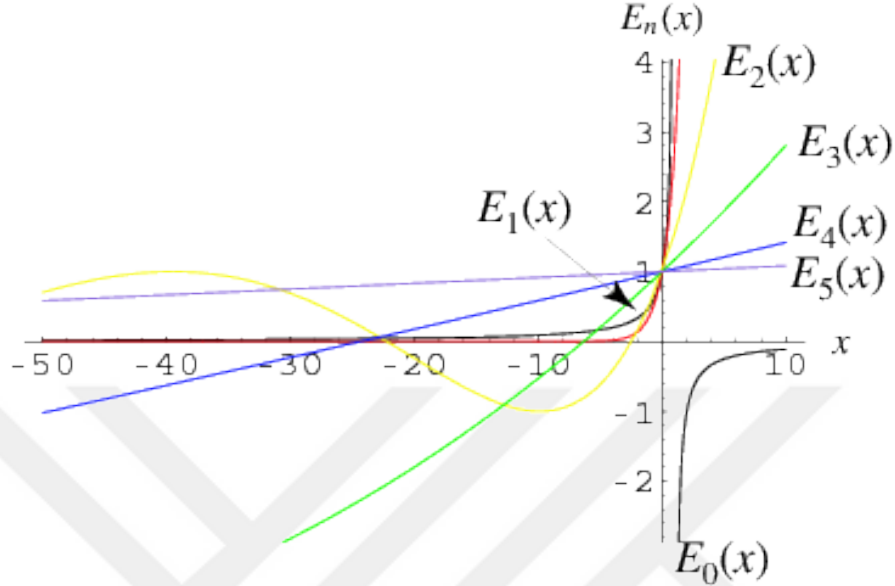
e^z üstel fonksiyonunun bir genelleştirmesini 1903 yılında Mittag-Leffler yapmış ve kendi adıyla bilinen fonksiyonu tanımlamıştır (Er, 2015). Fizik, biyoloji, mühendislik, yerbilimleri gibi birçok alandaki problemlerin çözümünde ve günümüzde de çok kullanılır hale gelmiştir (Er, 2015).

Mittag-Leffler fonksiyonunun 1903 yılında verilen ilk hali bir parametrelidir. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)} \quad \text{Re}(\alpha) > 0, z \in \mathbb{C} \quad (2.8)$$

(Er, 2015), şeklinde tanımlanır.

Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.4. Mittag-Leffler fonksiyonu (mathworld.wolfram.com)

İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunu, Wiman 1953 yılında aşağıdaki gibi tanımlamıştır (Er, 2015). Daha sonra bu fonksiyon üzerinde Wiman ile Agarwal ve Humbert adlı bilim adamları da çalışmıştır (Er, 2015).

İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)} \quad \text{Re}(\alpha) > 0, \text{Re}(\beta) > 0 \quad ; z, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (2.9)$$

(Er, 2015), şeklinde tanımlanır.

Mittag-Leffler fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki gibidir (Akyol ve diğ., 2021).

- 1) $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ ise $E_{1,1}(t) = e^t$ 'dir. Bu nedenle, Mittag-Leffler fonksiyonunun olağan üstel fonksiyonun bir genellemesi olduğu söylenebilir.
- 2) $0 < q < 1$ için $E_{q,1}(t) > 0$ 'dır.
- 3) $0 < q < 1$ ve $t > 0$ ise $E_{q,1}(t)$ monoton artandır.
- 4) $D^q(E_{q,1}(t^q)) = E_{q,1}(t^q)$.
- 5) $D^{nq}(E_{q,1}(rt^q)) = r^n E_{q,1}(rt^q)$ ($0 < q < 1$, r bir sabittir ve $n \in \mathbb{N}$)

Aşağıda verilen,

$$\begin{aligned}\sin_q(\mu t) &= \frac{E_{q,1}(i\mu t^q) - E_{q,1}(-i\mu t^q)}{2i} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\mu t^q)^{2k+1}}{\Gamma((2k+1)q+1)}\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}\cos_q(\mu t) &= \frac{E_{q,1}(i\mu t^q) + E_{q,1}(-i\mu t^q)}{2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\mu t^q)^{2k}}{\Gamma(2kq+1)}\end{aligned}\quad (2.11)$$

denklemleri ise kesirli trigonometrik fonksiyonlar olarak adlandırılır (Akyol ve diğ., 2021). Bu fonksiyonlarda, $q = 1$ olduğunda $\sin(\mu t)$ ve $\cos(\mu t)$ olur.

2.1.6. Wright Fonksiyonu

Wright fonksiyonu, kesirli ısı ve dalga denklemleri gibi lineer kısmi kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinde (Lülecı, 2011), kullanılır. Wright fonksiyonu,

$$W(z; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.12)$$

(Lülecı, 2011), şeklinde tanımlanır.

2.2. Kesirli Mertebeden Türev Alma Yöntemleri

Kesirli mertebeden türevin günümüzde kullanımı git gide daha sıklaşmıştır. Bunun temel sebebi fiziksel modelleri daha doğru ifade edebilmesi yani; sadece şuan ki zamanı değil ayrıca zaman tarihini içeren modellemeleri sağlayabilmesi, çok karmaşık yapıdaki sistemleri anlamaya yönelik yeni bir bakış açısı sunması, birçok probleme yönelik değişik yaklaşımlar ve daha iyi sonuçlar vermesidir.

Caputo kesirli tanımı diferansiyel denklemler için tamsayı mertebeden başlangıç koşullarını tanımlayabilmesinden (Çavuş, 2006), dolayı daha avantajlıdır. Bu yüzden de kullanımı diğer yöntemlere göre daha kullanışlıdır. Riemann-Liouville tanımının aksine Caputo tanımı tekrarlanan integrasyonlardan oluşturulmuştur. Grünwald-Letnikov tanımı da daha çok nümerik algoritmalarda kullanılmaktadır. Ayrıca kesirli mertebeden

türev alma yöntemlerinin tamamı klasik türevin aksine zincir kuralını sağlamaz (Cetinkaya, 2018).

2.2.1. Euler Tanımı

Euler tanımı kesirli mertebeden türev uygulamalarının kolay yoldan çözümünü yapmakta daha çok kullanılır ancak lineerlik özelliği her zaman sağlanmayabilir.

Kesirli mertebeden türevin sonuçları,

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \quad (2.13)$$

(Karcı, 2015), bağıntısından bulunur. Burada m fonksiyonun derecesi, n ise mertebedir.

2.2.2. Grünwald-Letnikov Tanımı

f(t) fonksiyonu için a ve t'ler limit değerleri olmak üzere Grünwald-Letnikov tanımı,

$$D_t^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r C(p, r) f(t - rh) \quad (2.14)$$

(Soytaş, 2006), şeklindedir. Bu eşitlikte p = m ise m. mertebeden türev ve eğer p = -m ise m katlı integral olur.

2.2.3. Riemann-Liouville Tanımı

Genellikle bu tanımda yaptığımız sol türev (Sökmen, 2012), almaktır. Yani burda sağ türev ihmal edilebilir. Bunun sebebi ise verilen fonksiyonun şimdiki durumu gelecekteki durumuna (Sökmen, 2012), bağlı değildir. Yani bu ifade de ilk olarak integral alıp daha sonra türev işlemi yaparak kesirli mertebeden türevin sonucu bulunur. Riemann-Liouville'nin genel bağıntısı,

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-n+q}} \quad (q > 0 \text{ ve } q \in \mathbb{R} \text{ ve } n-1 \leq q \leq n \text{ } n \in \mathbb{Z}) \quad (2.15)$$

(Cansız, 2010), şeklindedir. q burada mertebeyi, n ise q'nun üstündeki en küçük tamsayıyı temsil eder. Aynı zamanda Riemann-Liouville tanımı genel olarak lineerlik koşullarını sağlar.

2.2.4. Caputo Tanımı

Caputo türev alma yöntemi diğer yöntemlere göre oldukça daha kullanışlıdır. Daha gerçekçi sonuçlar verir. Riemann-Liouville'den farkı ise aslında ters mantığının olmasıdır. Yani burada ilk olarak türev alınıp daha sonra integral alınır. Caputo tanımı,

$$D_x^\mu f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_0^x (x-t)^{m-\mu-1} \frac{d^m}{dt^m} f(t) dt \quad (m-1 < \text{Re}(\mu) < m) \quad (2.16)$$

(Sökmen, 2012), genel bağıntısı ile ifade edilir. μ burada mertebeyi, m ise μ 'nün üstündeki en küçük tamsayıyı temsil eder. Aynı zamanda Caputo tanımı genel olarak lineerlik koşulunu sağlar.

Aşağıda kesirli mertebeden türevle ilgili örneklerle yer verilmiştir. Burada kesirli mertebeden türev yöntemlerinin uygulamalardaki farklı yoldan çözümünü göstermek amaçlanmıştır.

2.3. Kesirli Mertebeden Türev Örnekleri

a) $f(x) = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevini (Soytaş, 2006), Riemann-Liouville ve Euler tanımıyla bulunuz.

Çözüm: İlk olarak soruyu Riemann-Liouville tanımından çözelim.

$0 \leq q \leq 1$, $n=1$ ve $q = \frac{1}{2}$ değerleri,

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-n+q}} \text{ ifadesinde yerine yazılırsa,}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t dt}{(x-t)^{1-1+\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}$$

$t = ux$, $dt = xdu$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \frac{u du}{(1-u)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} B\left(2, \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}}$$

bulunur.

Diğer taraftan da soruyu Euler tanımından çözersek;

$f(x) = x$, $n = \frac{1}{2}$ ve $m = 1$ değerleri,

$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}+1\right)} x^{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}} \text{ ise}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}}$$

bulunur.

b) $f(x) = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ mertebeden türevini Caputo tanımı yardımıyla bulunuz.

Çözüm: $0 < \mu < 1$, $m = 1$ ve $\mu = \frac{1}{2}$ değerleri aşağıdaki ifadede yerine yazılırsa,

$$D_x^\mu f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_0^x (x-t)^{m-\mu-1} \frac{d^m}{dt^m} f(t) dt,$$

$$D_x^{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{1-\frac{1}{2}-1} \frac{d}{dt} t dt$$

$$D_x^{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

$t = ux$, $dt = xdu$ dönüşümü uygulanırsa,

$$D_x^{\frac{1}{2}} x = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{B(\frac{1}{2}, 1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}}$$

bulunur.

c) $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevini (Soytaş, 2006), Euler tanımıyla bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x^3}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3-\frac{1}{2}+1)} x^{3-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x^3}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}} \text{ bulunur.}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x^2}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)} x^{2-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x^2}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$$

bulunur.

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)} x^{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} \text{ bulunur.}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}1}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(1+0)}{\Gamma(0-\frac{1}{2}+1)} x^{0-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \text{ bulunur.}$$

Kesirli türevlerin lineerlik özelliğinden ifadenin sonucu aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}(x^3 + 3x^2 + x + 1)}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}} + 3\frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{16}{5\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}}$$

d) $f(x) = x^3$ fonksiyonunun $\frac{3}{2}$. mertebeden türevini (Soytaş, 2006), Euler ve Riemann-Liouville tanımıyla bulunuz.

Çözüm: $f(x) = x^3$, $n = \frac{3}{2}$ ve $m = 3$ değerleri yerine yazılırsa,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x^3}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3-\frac{3}{2}+1)} x^{3-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \text{ bulunur.}$$

Diğer taraftan soruyu Riemann-Liouville tanımından çözelim. $q = \frac{3}{2}$, $n = 2$ değerleri aşağıdaki bağıntıda yerine yazılırsa,

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-n+q}}$$

$$\frac{d^{\frac{3}{2}} f(x)}{dx^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \frac{t^3 dt}{(x-t)^{1-2+\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^{\frac{3}{2}} f(x)}{dx^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \frac{t^3 dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}$$

$t = ux$, $dt = xdu$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{d^{\frac{3}{2}} f(x)}{dx^{\frac{3}{2}}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$$

bulunur.

e) $f(x) = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevini (Soytaş, 2006), Euler tanımı yardımıyla iki kere alınız.

Çözüm: $n = \frac{1}{2}$ ve $m = 1$ değerlerini ifadede yerine yazalım.

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)} x^{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}}$$

bulunur.

Şimdi de bulduğumuz fonksiyonun aynı mertebeden türevini alalım.

$$\begin{aligned}
\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{d^{\frac{1}{2}} f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} \right] &= \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)} x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1)} x^0
\end{aligned}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{d^{\frac{1}{2}} f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{1} 1 = 1 \text{ bulunmuş olur.}$$

Diğer taraftan soru,

$$\begin{aligned}
\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{d^{\frac{1}{2}} f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} \right] &= \frac{d^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} f(x)}{dx^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{df(x)}{dx} \\
&= \frac{d}{dx} x \\
&= 1
\end{aligned}$$

şeklinde de bulunabilir.

f) $f(x) = x$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitliğin (Soytaş, 2006), doğruluğunu gösteriniz.

$$\frac{d}{dx} \left(D_t^{\frac{1}{2}} f(x) \right) = D_t^{1+\frac{1}{2}} f(x) = D_t^{\frac{3}{2}} f(x)$$

Çözüm:

$f(x) = x$ olduğuna göre önce, $\frac{d}{dx} \left(D_t^{\frac{1}{2}} f(x) \right)$ ifadesini hesaplayalım.

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t dt}{(x-t)^{1-1+\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}$$

$t = ux$, $dt = xdu$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left(\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2\sqrt{x}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

bulunur. Diğer taraftan $D_t^{\frac{3}{2}} f(x)$ ifadesini hesaplayalım.

$$\frac{d^{\frac{3}{2}}x}{dx^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \frac{t dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}$$

$t = ux$, $dt = xdu$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{d^{\frac{3}{2}}x}{dx^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} 2\sqrt{x} \right)$$

$$\frac{d^{\frac{3}{2}}x}{dx^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

bulunur. İki ifade de aynı olduğundan dolayı,

$$\frac{d}{dx} \left(D_t^{\frac{1}{2}} f(x) \right) = D_t^{1+\frac{1}{2}} f(x) = D_t^{\frac{3}{2}} f(x)$$

eşitliği gerçekleşir.

2.4. Kesirli Mertebeden Türevlerin Özellikleri

2.4.1. Lineerlik

Tam sayılı mertebeden türevler gibi Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo kesirli mertebeden türevler de lineerlik özelliğini sağlarlar. Ancak Euler tanımında lineerlik özelliği her zaman sağlanmayabilir. Lineerlik özelliği,

$$D^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t) \quad (2.17)$$

(Er, 2015), şeklindedir.

2.4.2. Homojenlik

Kesirli mertebeden türevler de tam sayılı mertebeden türevler gibi homojenlik özelliğini sağlarlar. Homojenlik özelliği C sabit olmak üzere,

$$D_t^\alpha [Cf(t)] = C[D_t^\alpha f(t)] \quad (2.18)$$

(Er, 2015), şeklindedir.

2.4.3. Birleşme

Belirli koşullar altında,

$$D^\alpha D^\beta = D^\beta D^\alpha$$

$$D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta} \quad (2.19)$$

$$D^\alpha f = g \rightarrow f = D^{-\alpha} g$$

(Er, 2015), sağlanır. $f(t)$ sürekli fonksiyon olmak üzere α ve β pozitif sayıları için $\alpha < \beta$ sağlanıyorsa,

$$D^\alpha [D^{-\beta} f(t)] = D^{\alpha-\beta} f(t) \quad (2.20)$$

(Er, 2015), gerçekleşir. Ancak önce türev sonra integral alınırsa,

$$D^{-\beta} [D^\alpha f(t)] = D^{\alpha-\beta} f(t) - \sum_{k=\beta-\alpha}^{\beta-1} \frac{(t-k)^k}{k!} f^{(\alpha+k-\beta)}(a) \quad (2.21)$$

(Er, 2015), gerçeklenir.

2.4.4. Leibniz

Leibniz özelliği, iki fonksiyonun çarpımının türevini bulmak için kolaylık sağlar. Özellikle kesirli mertebeden türevi bilinen bir fonksiyon ile bir polinomun çarpımının kesirli mertebeden türevini (Cansız, 2010), bulmak için çok kullanışlıdır. Leibnizlik zelliği,

$$D_t^\alpha [g(t)f(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} g^{(k)}(t) D_t^{\alpha-k} f(t) \quad (2.22)$$

(Cansız, 2010), şeklindedir.

Leibniz formülüyle seri halleri mevcut fonksiyonların kesirli mertebeden türevleri (Ordulu, 2012), bulunur.

2.5. Kesirli Mertebeden Türevlerin Laplace Dönüşümleri

2.5.1. Grünwald-Letnikov Kesirli Mertebeden Türevin Laplace Dönüşümü

$0 < \alpha < 1$ olmak üzere, Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türevin Laplace dönüşümü,

$$L\{D_t^\alpha f(t) ; s\} = s^\alpha F(s) \quad (2.23)$$

(avuş, 2006), şeklindedir.

2.5.2. Riemann-Liouville Kesirli Mertebeden Türevin Laplace Dönüşümü

$\alpha > 0$ ve $n-1 \leq \alpha < n$ olmak üzere, Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevin Laplace dönüşümü,

$$L\{D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D_t^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (2.24)$$

(avuş, 2006), şeklindedir.

Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümünün fiziksel problemlere uygulanabilirliği (avuş, 2006), sınırlıdır.

2.5.3. Caputo Kesirli Mertebeden Türevin Laplace Dönüşümü

$n-1 \leq \alpha < n$ olmak üzere, Caputo kesirli mertebeden türevin Laplace dönüşümü,

$$L\{D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (2.25)$$

(Çavuş, 2006), şeklindedir. Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşüm denklemi, ele alınan problemin fiziksel yorumlarını (Çavuş, 2006), kesin yapmamızı sağlar.

2.6. Kesirli Mertebeden Türevlerin Fourier Dönüşümü

Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo kesirli türevleri için aynı formdaki Fourier dönüşümü,

$$\begin{aligned} F_e\{D^\alpha g(t); w\} &= (-iw)^{\alpha-n} F_e\{g^{(n)}(t); w\} \\ &= (-iw)^{\alpha-n} (-iw)^n G(w) \\ &= (-iw)^\alpha G(w) \end{aligned} \quad (2.26)$$

(Çavuş, 2006), şeklindedir. Yukarıdaki eşitlikte $D^\alpha g(t)$ gösterimi; Grünwald-Letnikov $-\infty^{D_t^\alpha} g(t)$, Riemann-Liouville $-\infty^{D_t^\alpha} g(t)$ ve Caputo ${}_{-\infty}^C D_t^\alpha g(t)$ kesirli türevlerini (Çavuş, 2006), temsil etmektedir.

3. KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE UYGULAMALARI

3.1. Kesirli Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklemler

$$\begin{cases} D^{2q}u(t) + BD^qu(t) + Cu(t) = 0 \\ u(t_0) = 0, D^qu(t_0) = u_0^q \end{cases} \quad (3.1)$$

(3.1) denkleminin çözümü $u = E_{q,1}(rt^q)$ şeklindedir (Sambandham ve Vatsala, 2015). Burada $D^{2q}u = D^q(D^qu)$ 'dur. (3.1) denkleminin karakteristik denklemini bulalım.

$$r^2 + Br + C = 0$$

a) $B^2 - 4C > 0$ ise farklı iki gerçekte köke sahiptir ve (3.1) denkleminin genel çözümü,

$$u(t) = c_1 E_{q,1}(r_1(t - t_0)^q) + c_2 E_{q,1}(r_2(t - t_0)^q) \quad (3.2)$$

(Sambandham ve Vatsala, 2015), şeklindedir.

b) $B^2 - 4C = 0$ ise $r = r_1$ olacak şekilde çakışık kökler vardır ve (3.1) denkleminin genel çözümü,

$$u(t) = c_1 E_{q,1}(r_1(t - t_0)^q) + c_2 \frac{(t - t_0)^q}{q} E_{q,q}(r_1(t - t_0)^q) \quad (3.3)$$

(Sambandham ve Vatsala, 2015), şeklindedir.

c) $B^2 - 4C < 0$ ise r için iki karmaşık kökümüz vardır ve (3.1) denkleminin iki doğrusal bağımsız çözümü,

$$u(t) = c_1 E_{q,1}((\lambda + i\mu)(t - t_0)^q) + c_2 E_{q,1}((\lambda - i\mu)(t - t_0)^q) \quad (3.4)$$

(Sambandham ve Vatsala, 2015), şeklindedir.

$\lambda = 0$ için,

$$\sin_q(\mu t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\mu t^q)^{2k+1}}{\Gamma((2k+1)q+1)} \quad (3.5)$$

$$\cos_q(\mu t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\mu t^q)^{2k}}{\Gamma(2kq+1)} \quad (3.6)$$

(3.5) ve (3.6) denklemlerinde $q = 1$ seçilirse $\sin(\mu t)$ ve $\cos(\mu t)$ fonksiyonları oluşur (Sambandham ve Vatsala, 2015).

Ayrıca $n - 1 < n\alpha < n$, $b_i \in \mathbb{R}$ değerleri için,

$$\sum_{i=0}^n b_i D^{i\alpha} u(t) = 0 \quad (3.7)$$

(Erman, 2020), homojen sıralı kesirli diferansiyel denkleminin çözümü $E_\alpha(rt^\alpha)$ formundadır. Burada r 'ye karşılık gelen karakteristik denklem,

$$P(r) = \sum_{i=0}^n b_i r^i \quad (3.8)$$

(Erman, 2020), şeklindedir. (3.7)'de, (3.8) karakteristik denkleminin k tane çakışık r_0 kökü varsa (3.7) denkleminin çözümü,

$$u(t) = c_0 E_\alpha(r_0 t^\alpha) + \sum_{i=1}^{k-1} c_i \frac{t^{i\alpha}}{i\alpha} E_{\alpha,i\alpha}^i(r_0 t^\alpha) \quad (3.9)$$

(Erman, 2020), şeklindedir.

3.1.1. Örnekler

$$a) D^{2q}u(t) - 3D^q u(t) + 2u(t) = 0$$

$u(0) = 0$, $D^q(u(0)) = 1$, $0,5 < q < 1$ şartlarını sağlayan Caputo diferansiyel denkleminin çözümünü (Sambandham ve Vatsala, 2015), bulunuz.

Çözüm: İlk önce Caputo diferansiyel denkleminin karakteristik denklemini bulalım.

$r^2 - 3r + 2 = 0$ ise $r_1 = 1$ ve $r_2 = 2$ bulunur. $u(t)$ denkleminde bulunan değerleri yerine yazalım.

$u(t) = c_1 E_{q,1}((t - t_0)^q) + c_2 E_{q,1}(2(t - t_0)^q)$ olur (Sambandham ve Vatsala, 2015). Şimdi de verilen koşullardan yararlanarak c_1 ve c_2 değerlerini bulalım ($t_0 = 0$).

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 + 2c_2 = 1 \text{ ise } c_1 = -1 \text{ ve } c_2 = 1 \text{ bulunur.}$$

O halde,

$u(t) = -E_{q,1}((t - t_0)^q) + E_{q,1}(2(t - t_0)^q)$ şeklinde bulunmuş olur (Sambandham ve Vatsala, 2015).

b) $D^{2q}u(t) - 2D^qu(t) + u(t) = 0$

$u(0) = 0$, $D^q(u(0)) = 2$, $0,5 < q < 1$ şartlarını sağlayan Caputo diferansiyel denkleminin çözümünü (Sambandham ve Vatsala, 2015), bulunuz.

Çözüm: İlk önce Caputo diferansiyel denkleminin karakteristik denklemini bulalım.

$r^2 - 2r + 1 = 0$ ise $r_1 = 1$ ve $r_2 = 1$ bulunur. $u(t)$ denkleminde bulunan değerleri yerine yazalım.

$u(t) = c_1 E_{q,1}((t - t_0)^q) + c_2 \frac{(t-t_0)^q}{q} E_{q,q}((t - t_0)^q)$ olur (Sambandham ve Vatsala, 2015). Şimdi de verilen koşullardan yararlanarak c_1 ve c_2 değerlerini bulalım ($t_0 = 0$).

$$c_1 = 1$$

$$c_1 + c_2 = 2 \text{ ise } c_1 = 1 \text{ ve } c_2 = 1 \text{ bulunur.}$$

O halde,

$u(t) = E_{q,1}((t - t_0)^q) + \frac{(t-t_0)^q}{q} E_{q,q}((t - t_0)^q)$ şeklinde bulunmuş olur (Sambandham ve Vatsala, 2015).

c) $D^{2q}u(t) + u(t) = 0$

$u(0) = 0$, $D^q(u(0)) = 1$ veya $u(0) = 1$, $D^q(u(0)) = 0$, $0,5 < q < 1$ şartlarını sağlayan Caputo diferansiyel denkleminin çözümünü (Sambandham ve Vatsala, 2015), bulunuz.

Çözüm: İlk önce Caputo diferansiyel denkleminin karakteristik denklemini bulalım.

$r^2 + 1 = 0$ ise $r_1 = -i$ ve $r_2 = i$ bulunur. Burada bulunan köklerin reel kısmı 0 olduğundan,

i) $u(0) = 0$, $D^q(u(0)) = 1$ değerleri için ($t_0 = 0$),

$$u(t) = \sin_q(t^q)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2q}(-1)^k}{\Gamma((2k+1)q+1)} \text{ bulunur (Sambandham ve Vatsala, 2015).}$$

ii) $u(0) = 1$, $D^q(u(0)) = 0$ değerleri için ($t_0 = 0$),

$$u(t) = \cos_q(t^q)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{(2k+1)q}(-1)^k}{\Gamma((2k+1)q+1)} \text{ bulunur (Sambandham ve Vatsala, 2015).}$$

3.2. Sıralı Zaman Kesirli Dalga Denklemini İçeren Matematik Probleminin Çözümü

Bu kısımda Dirichlet sınır ve başlangıç koşullarına tabii dalga denkleminin analitik çözümünü değişkenlerine ayırma yöntemiyle bulacağız. Var olan problemimiz,

$$\begin{cases} D_t^{2\alpha} u = c^2 u_{xx}, 0 < x < 1, 0 < \alpha < 1 \\ u(x, 0) = \phi(x), D_t^\alpha u(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

şeklindedir. O halde,

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, 0 < x < 1 \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

denklemini, (3.10) denkleminde $\alpha = 1$ 'in yerine koyulmasıyla elde edilir. Problemi iki ayrı kesirli ODE(Ordinary Differential Equation)'ye indirgemek için değişkenlerin ayrılması yöntemi uygulanmaktadır. Analitik çözümü, belirli bir özdeğer probleminin öz fonksiyonlarına göre bir Fourier serisi biçiminde elde edilir.

$D_t^{2\alpha} u(x, t)$ 'nin sıralı olduğunu varsaydığımız için, aşağıdaki bileşik kurala uyar:

$$D_t^{2\alpha} u = D^\alpha (D^\alpha u)$$

Aradığımız (3.10) problemindeki dalga denkleminin bir çözümü,

$$u(x, t; \alpha) = X(x)T(t; \alpha) \quad (0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T) \quad (3.12)$$

(Cetinkaya ve diğ., 2019), şeklindedir.

Dalga denkleminin tüm ayrılmış çözümlerini bulmaya çalışalım. (3.12)' deki ifade (3.10) probleminde yerine yazılırsa,

$$X(x)D_t^{2\alpha}T(t; \alpha) = c^2X''(x)T(t; \alpha) \quad (3.13)$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafını $-c^2X(x)T(t; \alpha)$ 'ya bölersek,

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{D_t^{2\alpha}T(t; \alpha)}{c^2T(t; \alpha)} = \lambda \quad (3.14)$$

oluşur. Açıkça λ bir sabittir, çünkü $\lambda = -\frac{D_t^{2\alpha}T(t; \alpha)}{c^2T(t; \alpha)}$ için x 'ten, $\lambda = -\frac{X''(x)}{X(x)}$ için t 'den bağımsızdır.

Dalga denklemindeki sınır koşullarından,

$$X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0, \forall t \Rightarrow X(0) = X(l) = 0 \quad (3.15)$$

(Cetinkaya ve Demir, 2020), eşitliğini elde ederiz. (3.14)'teki ifadeden de,

$$(X'')(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (3.16)$$

elde edilir. (3.16)'daki kesirli diferansiyel denklemin çözümü,

$$X(x) = C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x) \quad (3.17)$$

biçiminde olur. (3.15)'teki ifadeler (3.17)'de yerine koyulursa,

$$X(0) = C = 0 \text{ ve } X(l) = D\sin(\beta l) = 0 \text{ olur.}$$

$D = 0$ olursa önemsiz sıfır çözüm oluşur. Bu nedenle, $\sin(\beta l) = 0$ (Cetinkaya ve diğ., 2020), olduğu durumu ele alırız. Sonuç olarak,

i) $n = 1, 2, 3, \dots$ için $\beta l = n\pi$

ii) $n = 1, 2, 3, \dots$ için $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ olur.

Her bir λ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) özdeğeri için (3.14)'teki denklem,

$$(D^{2\alpha} T_n)(t; \alpha) + c^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t; \alpha) = 0 \quad (3.18)$$

kesirli diferansiyel denklemini verir. $n = 1, 2, 3, \dots$ için $T_n(t; \alpha)$,

$$T_n(t; \alpha) = A_n \cos_\alpha \left(\frac{cn\pi}{l} t^\alpha\right) + B_n \sin_\alpha \left(\frac{cn\pi}{l} t^\alpha\right) \quad (3.19)$$

çözümüne sahip olur. Her bir $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) özdeğeri için,

$$\begin{aligned} u_n(x, t; \alpha) &= X_n(x) T_n(t; \alpha) \\ &= \left[A_n \cos_\alpha \left(\frac{cn\pi}{l} t^\alpha\right) + B_n \sin_\alpha \left(\frac{cn\pi}{l} t^\alpha\right) \right] \sin \left(\frac{n\pi x}{l}\right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

ifadesini elde ederiz. Burada A_n, B_n keyfi sabitlerdir. Dalga denkleminin çözümlerinin doğrusal bir kombinasyonu aynı zamanda bir çözüm olduğundan, herhangi bir sonlu toplam,

$$u(x, t) = \sum_n \left[A_n \cos_\alpha \left(\frac{cn\pi}{l} t^\alpha\right) + B_n \sin_\alpha \left(\frac{cn\pi}{l} t^\alpha\right) \right] \sin \left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.21)$$

şeklinde elde edilir.

Burada $u(x, t)$, (3.10) problemindeki hem kesirli denklemleri hem de sınır koşullarını sağlayan bir çözümdür. Sınır değer problemimiz (3.10)'un çözümünü, ayrılmış çözümlerin doğrusal bir kombinasyonu olarak bulacağız. Bununla birlikte, (3.21) formundaki sonlu toplamlar çok özeldir, çünkü her fonksiyon sinüslerin ve kosinüslerin toplamı gibi değildir. Başlangıçtaki sınır koşulları yardımıyla,

$$\phi(x) = \sum A_n \sin \left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.22)$$

$$D_t^\alpha u(x, t) = \sum \left[A_n \frac{cn\pi}{l} \sin_\alpha \left(\frac{cn\pi}{l} t^\alpha\right) + B_n \frac{cn\pi}{l} \cos_\alpha \left(\frac{cn\pi}{l} t^\alpha\right) \right] \sin \left(\frac{n\pi x}{l}\right) \text{ olmasıyla da,}$$

$$\Psi(x) = \sum B_n \frac{cn\pi}{l} \sin \left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.23)$$

elde edilir. A_n, B_n katsayılarını aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad D_t^\alpha u(x, 0) = \psi(x),$$

$$A_n \equiv \frac{2}{1} \int_0^1 \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) \phi(x) dx \quad (3.24)$$

$$\frac{n\pi c}{1} B_n \equiv \frac{2}{1} \int_0^1 \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) \Psi(x) dx \quad (3.25)$$

Sonuç olarak bu ifadelerin bulunmasıyla da problemin çözümü,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos_\alpha\left(\frac{cn\pi}{1} t^\alpha\right) + B_n \sin_\alpha\left(\frac{cn\pi}{1} t^\alpha\right)] \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) \quad (3.26)$$

şeklinde olur.

Bu kısımda, bu çalışmada kullanılan yöntemin etkinliğini ve doğruluğunu kanıtlamak için bazı açıklayıcı örnekler sunulmuştur.

3.2.1. Örnekler

a) Zaman kesirli dalga denklemini içeren aşağıdaki başlangıç sınır değeri problemini düşünelim:

$$\begin{cases} D_t^{2\alpha} u(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), & 0 < x < 1, t > 0, 0 < \alpha < 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin(5\pi x) + 2\sin(7\pi x) \\ D_t^\alpha u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) [A_n \cos_\alpha(cn\pi t^\alpha) + B_n \sin_\alpha(cn\pi t^\alpha)]$$

A_n ve B_n 'i değerlendirmek için integral formülünü kullanmak gerekli değildir. Sadece katsayıları eşleştirerek doğrudan gözlemlemek daha kolay olacaktır.

$$\sin(5\pi x) + 2\sin(7\pi x) = u(x, 0)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) \Rightarrow A_n = \begin{cases} 1 & n = 5 \\ 2 & n = 7 \\ 0 & n \neq 5, 7 \end{cases}$$

$$0 = D_t^\alpha u(x, 0)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} cn\pi B_n \sin(n\pi x) \Rightarrow B_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N} \text{ için}) \text{ bulunur.}$$

Bulunan değerler yerlerine koyulursa aşağıdaki çözümler elde edilir.

$$u(x, t) = \sin(5\pi x)\cos_\alpha(5c\pi t^\alpha) + 2\sin(7\pi x)\cos_\alpha(7c\pi t^\alpha)$$

$$\sin_q(\mu t^q) = \frac{E_{q,1}(i\mu t^q) - E_{q,1}(-i\mu t^q)}{2i}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\mu t^q)^{2k+1}}{\Gamma((2k+1)q+1)}$$

$$\cos_q(\mu t^q) = \frac{E_{q,1}(i\mu t^q) + E_{q,1}(-i\mu t^q)}{2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\mu t^q)^{2k}}{\Gamma(2kq+1)}$$

$\mu = 5c\pi$ ve $\xi = 7c\pi$ seçilirse,

$$u(x, t) = \sin(5\pi x) \frac{E_{\alpha,1}(i\mu t^\alpha) + E_{\alpha,1}(-i\mu t^\alpha)}{2} + 2\sin(7\pi x) \frac{E_{\alpha,1}(i\xi t^\alpha) + E_{\alpha,1}(-i\xi t^\alpha)}{2} \text{ olur.}$$

b) Zaman kesirli dalga denklemini içeren aşağıdaki başlangıç sınır değeri problemini düşünelim:

$$\begin{cases} D_t^{2\alpha} u(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), 0 < x < 1, t > 0, 0 < \alpha < 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = x(1 - x) \\ D_t^\alpha u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) [A_n \cos_\alpha(c n \pi t^\alpha) + B_n \sin_\alpha(c n \pi t^\alpha)]$$

A_n ve B_n katsayıları řu şekilde hesaplanır:

$$A_n = 2 \int_0^1 x(1 - x) \sin(n\pi x) dx,$$

$$B_n = 2 \int_0^1 0 \sin(n\pi x) dx = 0$$

Aşağıdaki hesaplamalar yardımıyla,

$$\int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \int_0^1 -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dn} \cos(n\pi x) dx$$

$$\int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dn} \int_0^1 \cos(n\pi x) dx$$

$$= -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dn} \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \Big|_0^1$$

$$= -\cos(n\pi) \frac{1}{n\pi}$$

$$\int_0^1 x^2 \sin(n\pi x) dx = \int_0^1 -\frac{1}{\pi^2} \frac{d^2}{dn^2} \sin(n\pi x) dx$$

$$= -\frac{1}{\pi^2} \frac{d^2}{dn^2} \int_0^1 \sin(n\pi x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \frac{d^2}{dn^2} \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_0^1$$

$$= \cos(n\pi) \frac{2 - n^2 \pi^2}{n^3 \pi^3} - \frac{2}{n^3 \pi^3}$$

$$A_n = 2 \int_0^1 x(1-x) \sin(n\pi x) dx$$

$$= 2 \left[-\cos(n\pi) \frac{1}{n\pi} - \cos(n\pi) \frac{2 - n^2 \pi^2}{n^3 \pi^3} + \frac{2}{n^3 \pi^3} \right]$$

$$= \frac{4}{n^3 \pi^3} [1 - \cos(n\pi)]$$

$$= \begin{cases} \frac{8}{n^3 \pi^3} & n \text{ tek sayısı için} \\ 0 & n \text{ çift sayısı için} \end{cases}$$

Bulunan değerler yerlerine koyulursa aşağıdaki çözüm elde edilir.

$$u(x, t) = \sum_{n \text{ tek}}^{\infty} \frac{8}{n^3 \pi^3} \sin(n\pi x) \cos_{\alpha}(cn\pi t^{\alpha}) \text{ olur.}$$

3.3. Bazı Kesirli Fonksiyonların Kesirli Türevleri ve Uygulamaları

$0 < \alpha \leq 1$, n negatif olmayan bir tam sayı, $c_0, c_1, \dots, c_n$ gerçekte sabitler, $c_n \neq 0$ ve x gerçekte bir değişken olsun. O zaman (3.27) denklemi,

$$p(x^{\alpha}) = \sum_{k=0}^n c_k p_k(x^{\alpha}) \tag{3.27}$$

(Yu, 2020), tüm k için,

$$p_k(x^\alpha) = \frac{1}{\Gamma(k\alpha+1)} x^{k\alpha} \quad (3.28)$$

(Yu, 2020), olmak üzere n . dereceden ve α . mertebeden kesirli polinom fonksiyonu olarak adlandırılır. O halde $0 < \alpha \leq 1$ ve n, k negatif olmayan sayılar için aşağıdaki eşitlik,

$$(D_x^\alpha)^n [p_k(x^\alpha)] = \begin{cases} p_{k-n}(x^\alpha), & \text{eğer } k \geq n, \\ 0, & \text{eğer } k < n \end{cases} \quad (3.29)$$

(Yu, 2020), şeklinde gerçekleşir.

$n = 1$ değeri (3.29) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} (D_x^\alpha)^1 [p_k(x^\alpha)] &= (D_x^\alpha)^1 \left[\frac{1}{\Gamma(k\alpha+1)} x^{k\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma((k-1)\alpha+1)} x^{(k-1)\alpha} \\ &= p_{k-1}(x^\alpha) \end{aligned} \quad (3.30)$$

(Yu, 2020), elde edilir. Şimdi de $0 < \alpha \leq 1$ ve n, k negatif olmayan sayılar olduğunu varsayalım. O zaman, $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (D_x^\alpha)^n) [p_k(x^\alpha)]$ denklemi (3.29) denkleminin yardımıyla,

$$\begin{aligned} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n (D_x^\alpha)^n) [p_k(x^\alpha)] &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (D_x^\alpha)^n [p_k(x^\alpha)] \\ &= \sum_{n=0}^k a_n p_{k-n}(x^\alpha) \end{aligned} \quad (3.31)$$

(Yu, 2020), denkleminde eşit olur. Aynı şekilde $0 < \alpha \leq 1$, n pozitif bir tamsayı ve λ karmaşık sayısı için,

$$(D_x^\alpha)^n [E_\alpha(\lambda x^\alpha)] = \lambda^n E_\alpha(\lambda x^\alpha) \quad (3.32)$$

(Yu, 2020), sağlanır.

$n = 1$ değeri (3.32) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
(D_x^\alpha)^1[E_\alpha(\lambda x^\alpha)] &= (D_x^\alpha)^1\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(D_x^\alpha)^1[\lambda^k x^{k\alpha}]}{\Gamma(k\alpha+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (D_x^\alpha)^1[x^{k\alpha}]}{\Gamma(k\alpha+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{(k-1)\alpha}}{\Gamma((k-1)\alpha+1)} \\
&= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \\
&= \lambda E_\alpha(\lambda x^\alpha)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

(Yu, 2020), elde edilir. O zaman, $0 < \alpha \leq 1$, n pozitif bir tamsayı, λ karmaşık sayı ve $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
f(D_x^\alpha)[E_\alpha(\lambda x^\alpha)] &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (D_x^\alpha)^n\right)[E_\alpha(\lambda x^\alpha)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (D_x^\alpha)^n[E_\alpha(\lambda x^\alpha)] \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n\right) E_\alpha(\lambda x^\alpha) \\
&= f(\lambda) E_\alpha(\lambda x^\alpha)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

(Yu, 2020), gerçekleşir. (3.34) denkleminde $\alpha = 1$ kabul edilirse,

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)[\exp(\lambda x)] = f(\lambda)\exp(\lambda x) \tag{3.35}$$

(Yu, 2020), eşitliği oluşur. Aynı zaman da $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ olmak üzere,

$f(D_x^\alpha)[\sin_\alpha(bx^\alpha)]$ ifadesi (3.36)'ya, $f(D_x^\alpha)[\cos_\alpha(bx^\alpha)]$ ifadesi de (3.37)'ye eşittir ($f(ib) \neq 0$). O halde,

$$\begin{aligned}
f(D_x^\alpha)[\sin_\alpha(bx^\alpha)] &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (D_x^\alpha)^n\right)[\sin_\alpha(bx^\alpha)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (D_x^\alpha)^n[\sin_\alpha(bx^\alpha)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(D_x^\alpha)[\sin_\alpha(bx^\alpha)] &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n [\cos \frac{n\pi}{2} \sin_\alpha(bx^\alpha) + \sin \frac{n\pi}{2} \cos_\alpha(bx^\alpha)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n [\operatorname{Re}[e^{i\frac{n\pi}{2}}] \sin_\alpha(bx^\alpha) + \operatorname{Im}[e^{i\frac{n\pi}{2}}] \cos_\alpha(bx^\alpha)] \\
&= (\sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{Re}[(ib)^n]) \sin_\alpha(bx^\alpha) + (\sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{Im}[(ib)^n]) \cos_\alpha(bx^\alpha) \\
&= \operatorname{Re}[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (ib)^n] \sin_\alpha(bx^\alpha) + \operatorname{Im}[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (ib)^n] \cos_\alpha(bx^\alpha) \\
&= \operatorname{Re}[f(ib)] \sin_\alpha(bx^\alpha) + \operatorname{Im}[f(ib)] \cos_\alpha(bx^\alpha) \tag{3.36}
\end{aligned}$$

(Yu, 2020), gereklenir.

Benzer ekilde,

$$\begin{aligned}
f(D_x^\alpha)[\cos_\alpha(bx^\alpha)] &= (\sum_{n=0}^{\infty} a_n (D_x^\alpha)^n) [\cos_\alpha(bx^\alpha)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (D_x^\alpha)^n [\cos_\alpha(bx^\alpha)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n [\cos \frac{n\pi}{2} \cos_\alpha(bx^\alpha) - \sin \frac{n\pi}{2} \sin_\alpha(bx^\alpha)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n [\operatorname{Re}[e^{i\frac{n\pi}{2}}] \cos_\alpha(bx^\alpha) - \operatorname{Im}[e^{i\frac{n\pi}{2}}] \sin_\alpha(bx^\alpha)] \\
&= (\sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{Re}[(ib)^n]) \cos_\alpha(bx^\alpha) - (\sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{Im}[(ib)^n]) \sin_\alpha(bx^\alpha) \\
&= \operatorname{Re}[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (ib)^n] \cos_\alpha(bx^\alpha) - \operatorname{Im}[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (ib)^n] \sin_\alpha(bx^\alpha) \\
&= \operatorname{Re}[f(ib)] \cos_\alpha(bx^\alpha) - \operatorname{Im}[f(ib)] \sin_\alpha(bx^\alpha) \tag{3.37}
\end{aligned}$$

(Yu, 2020), gereklenir. Bu denklemler aracılığıyla da sabit katsayılı homojen olmayan doğrusal FDE'nin çözümünü bulalım. Diyelim ki $0 < \alpha \leq 1$, n pozitif bir tamsayı, $a_0, a_1, \dots, a_n$ gerçek sabitler ($a_n \neq 0$) olsun. Bu sabit katsayılı homojen olmayan doğrusal FDE,

$$(a_n (D_x^\alpha)^n + a_{n-1} (D_x^\alpha)^{n-1} + \dots + a_1 D_x^\alpha + a_0) [y(x^\alpha)] = g(x^\alpha) \tag{3.38}$$

(Yu, 2020), eklinindedir. (3.38) denkleminin özel bir çözümü vardır. Bunun için de denklemin her iki tarafını $(a_n (D_x^\alpha)^n + a_{n-1} (D_x^\alpha)^{n-1} + \dots + a_1 D_x^\alpha + a_0)$ ifadesine bölelim. Böylece,

$$y_p(x^\alpha) = \left(\frac{1}{a_n(D_x^\alpha)^n + a_{n-1}(D_x^\alpha)^{n-1} + \dots + a_1 D_x^\alpha + a_0} \right) [g(x^\alpha)] \quad (3.39)$$

(Yu, 2020), elde edilmiş olur.

(3.38) denklemindeki $\alpha = 1$ durumu sabit katsayılar sonucu geleneksel homojen olmayan lineer adi diferansiyel denklemdir (Yu, 2020).

Son olarak da $0 < \alpha \leq 1$, n pozitif bir tam sayı, $a_0, a_1, \dots, a_n$ gerçekte sabitler ($a_n \neq 0$) olsun. A, B, C, D, b reel sayıları için,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m \end{aligned} \quad (3.40)$$

(Yu, 2020), gerçekleşir.

Sabit katsayılı homojen olmayan doğrusal FDE' nin çözümünü düşünecek olursak dört tane durum ortaya çıkar.

$$(a_n(D_x^\alpha)^n + a_{n-1}(D_x^\alpha)^{n-1} + \dots + a_1 D_x^\alpha + a_0) [y(x^\alpha)] = g(x^\alpha)$$

a) Eğer $g(x^\alpha) = A.p_k(x^\alpha)$ ise, (3.38) denklemi özel çözüme sahiptir. O halde,

$$y_p(x^\alpha) = A. \sum_{m=0}^k c_m p_{k-m}(x^\alpha) \quad (3.41)$$

(Yu, 2020), şeklindedir.

b) Eğer $g(x^\alpha) = B.E_\alpha(bx^\alpha)$ ise,

$$y_p(x^\alpha) = \frac{B}{a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0} E_\alpha(bx^\alpha) \quad (3.42)$$

(Yu, 2020), şeklindedir. ($a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0 \neq 0$)

c) Eğer $g(x^\alpha) = C.\sin_\alpha(bx^\alpha)$ ise,

$$y_p(x^\alpha) = C. \{ \operatorname{Re}[f(ib)] \sin_\alpha(bx^\alpha) + \operatorname{Im}[f(ib)] \cos_\alpha(bx^\alpha) \} \quad (3.43)$$

(Yu, 2020), şeklindedir. ($a_n(ib)^n + a_{n-1}(ib)^{n-1} + \dots + a_1(ib) + a_0 \neq 0$)

d) Eğer $g(x^\alpha) = D.\cos_\alpha(bx^\alpha)$ ise,

$$y_p(x^\alpha) = D. \{ \operatorname{Re}[f(ib)]\cos_\alpha(bx^\alpha) - \operatorname{Im}[f(ib)]\sin_\alpha(bx^\alpha) \} \quad (3.44)$$

(Yu, 2020), şeklindedir. $(a_n(ib)^n + a_{n-1}(ib)^{n-1} + \dots + a_1(ib) + a_0 \neq 0)$

(3.38) denkleminde $\alpha = 1$ kabul edilirse,

$$(a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0) [y(x)] = g(x) \quad (3.45)$$

(Yu, 2020), eşitliği oluşur.

Sabit katsayılı homojen olmayan bu diferansiyel denklemin çözümü için dört tane durum ortaya çıkar.

a) Eğer $g(x) = A.p_k(x) = \frac{A}{k!} x^k$ ise, (3.45) denklemi özel çözüme sahiptir.

O halde,

$$y_p(x) = A.\sum_{m=0}^k c_m p_{k-m}(x) \quad (3.46)$$

(Yu, 2020), şeklindedir.

b) Eğer $g(x) = B.\exp(bx)$ ise,

$$y_p(x) = \frac{B}{a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0} \exp(bx) \quad (3.47)$$

(Yu, 2020), şeklindedir. $(a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0 \neq 0)$

c) Eğer $g(x) = C.\sin(bx)$ ise,

$$y_p(x) = C. \{ \operatorname{Re}[f(ib)]\sin(bx) + \operatorname{Im}[f(ib)]\cos(bx) \} \quad (3.48)$$

(Yu, 2020), şeklindedir. $(a_n(ib)^n + a_{n-1}(ib)^{n-1} + \dots + a_1(ib) + a_0 \neq 0)$

d) Eğer $g(x) = D.\cos(bx)$ ise,

$$y_p(x) = D. \{ \operatorname{Re}[f(ib)]\cos(bx) - \operatorname{Im}[f(ib)]\sin(bx) \} \quad (3.49)$$

(Yu, 2020), şeklindedir. $(a_n(ib)^n + a_{n-1}(ib)^{n-1} + \dots + a_1(ib) + a_0 \neq 0)$

Bu çalışmada kesirli diferansiyel operatör yöntemi, sabit katsayılara sahip homojen olmayan FDE'nin özel çözümünü elde etmek için kullanılmıştır (Yu, 2020).

Bu kısımda, bu çalışmada kullanılan yöntemin etkinliğini ve doğruluğunu kanıtlamak için bazı açıklayıcı örnekler sunulmuştur.

3.3.1. Örnekler

a) $(\sin(D_x^{\frac{1}{3}}))[p_3(x^{\frac{1}{3}})] = ?$ (Yu, 2020),

Çözüm:

$$\begin{aligned} (\sin(D_x^{\frac{1}{3}}))[p_3(x^{\frac{1}{3}})] &= (D_x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{6}(D_x^{\frac{1}{3}})^3 + \dots)[p_3(x^{\frac{1}{3}})] \\ &= p_2(x^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{6}p_0(x^{\frac{1}{3}}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{3})}x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

bulunur.

b) $(\frac{\exp(D_x^{\frac{1}{2}})}{\cos(D_x^{\frac{1}{2}})}) [E_{\frac{1}{2}}(4x^{\frac{1}{2}})] = ?$ (Yu, 2020),

Çözüm:

$$(\frac{\exp(D_x^{\frac{1}{2}})}{\cos(D_x^{\frac{1}{2}})}) [E_{\frac{1}{2}}(4x^{\frac{1}{2}})] = \frac{\exp(4)}{\cos(4)} E_{\frac{1}{2}}(4x^{\frac{1}{2}})$$

bulunur.

c) $(\frac{\exp(\frac{d}{dx})}{\cos(\frac{d}{dx})}) [\exp(4x)] = ?$ (Yu, 2020),

Çözüm:

$$\left(\frac{\exp(\frac{d}{dx})}{\cos(\frac{d}{dx})}\right) [\exp(4x)] = \frac{\exp(4)}{\cos(4)} \exp(4x)$$

bulunur.

$$d) \left(\frac{1}{2(D_x^{\frac{1}{4}})^2 - 4D_x^{\frac{1}{4}} + 1}\right) [\sin_{\frac{1}{4}}(3x^{\frac{1}{4}})] = ? \text{ (Yu, 2020),}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2(D_x^{\frac{1}{4}})^2 - 4D_x^{\frac{1}{4}} + 1}\right) [\sin_{\frac{1}{4}}(3x^{\frac{1}{4}})] &= \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2(3i)^2 - 4(3i) + 1}\right] \sin_{\frac{1}{4}}(3x^{\frac{1}{4}}) + \operatorname{Im}\left[\frac{1}{2(3i)^2 - 4(3i) + 1}\right] \cos_{\frac{1}{4}}(3x^{\frac{1}{4}}) \\ &= -\frac{17}{433} \sin_{\frac{1}{4}}(3x^{\frac{1}{4}}) + \frac{12}{433} \cos_{\frac{1}{4}}(3x^{\frac{1}{4}}) \end{aligned}$$

bulunur.

$$e) \left(\frac{1}{3(D_x^{\frac{1}{2}})^3 + 5(D_x^{\frac{1}{2}})^2 - 7D_x^{\frac{1}{2}} - 4}\right) [\cos_{\frac{1}{2}}(6x^{\frac{1}{2}})] = ? \text{ (Yu, 2020),}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3(D_x^{\frac{1}{2}})^3 + 5(D_x^{\frac{1}{2}})^2 - 7D_x^{\frac{1}{2}} - 4}\right) [\cos_{\frac{1}{2}}(6x^{\frac{1}{2}})] &= \operatorname{Re}\left[\frac{1}{3(6i)^3 + 5(6i)^2 - 7(6i) - 4}\right] \cos_{\frac{1}{2}}(6x^{\frac{1}{2}}) - \\ \operatorname{Im}\left[\frac{1}{3(6i)^3 + 5(6i)^2 - 7(6i) - 4}\right] \sin_{\frac{1}{2}}(6x^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

$$= -\frac{184}{509956} \cos_{\frac{1}{2}}(6x^{\frac{1}{2}}) - \frac{690}{509956} \sin_{\frac{1}{2}}(6x^{\frac{1}{2}})$$

bulunur.

$$f) (5(D_x^{\frac{1}{2}})^3 - 2(D_x^{\frac{1}{2}})^2 - 4D_x^{\frac{1}{2}} + 3)[y(x^{\frac{1}{2}})] = 6 \cdot p_2(x^{\frac{1}{2}}) \text{ (Yu, 2020),}$$

Çözüm:

$$y_p(x^{\frac{1}{2}}) = \left(\frac{1}{5(D_x^{\frac{1}{2}})^3 - 2(D_x^{\frac{1}{2}})^2 - 4D_x^{\frac{1}{2}} + 3}\right) [6 \cdot p_2(x^{\frac{1}{2}})]$$

$$\begin{aligned}
&= 6.(\frac{1}{3} + \frac{4}{9}D_x^{\frac{1}{2}} + \frac{22}{27}(D_x^{\frac{1}{2}})^2 + \dots) [p_2(x^{\frac{1}{2}})] \\
&= 6.(\frac{1}{3}p_2(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{4}{9}p_1(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{22}{27}p_0(x^{\frac{1}{2}})) \\
&= 2p_2(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{8}{3}p_1(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{44}{9}p_0(x^{\frac{1}{2}}) \\
&= 2x + \frac{16}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{44}{9}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$g) ((D_x^{\frac{1}{2}})^2 + 2D_x^{\frac{1}{2}} + 3)[y(x^{\frac{1}{3}})] = 4.E_{\frac{1}{3}}(2x^{\frac{1}{3}}) \text{ (Yu, 2020),}$$

Çözüm:

$$y_p(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{4}{11}.E_{\frac{1}{3}}(2x^{\frac{1}{3}})$$

bulunur.

$$h) (2(D_x^{\frac{1}{4}})^2 - 4D_x^{\frac{1}{4}} + 1)[y(x^{\frac{1}{4}})] = \sin_{\frac{1}{4}}(3x^{\frac{1}{4}}) \text{ (Yu, 2020),}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned}
y_p(x^{\frac{1}{4}}) &= (\frac{1}{2(D_x^{\frac{1}{4}})^2 - 4D_x^{\frac{1}{4}} + 1})[\sin_{\frac{1}{4}}(3x^{\frac{1}{4}})] \\
&= -\frac{17}{433}\sin_{\frac{1}{4}}(3x^{\frac{1}{4}}) + \frac{12}{433}\cos_{\frac{1}{4}}(3x^{\frac{1}{4}}) \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

$$1) (3(D_x^{\frac{1}{2}})^3 + 5(D_x^{\frac{1}{2}})^2 - 7D_x^{\frac{1}{2}} - 4)[y(x^{\frac{1}{2}})] = \cos_{\frac{1}{2}}(6x^{\frac{1}{2}}) \text{ (Yu, 2020),}$$

Çözüm:

$$y_p(x^{\frac{1}{2}}) = (\frac{1}{3(D_x^{\frac{1}{2}})^3 + 5(D_x^{\frac{1}{2}})^2 - 7D_x^{\frac{1}{2}} - 4})[\cos_{\frac{1}{2}}(6x^{\frac{1}{2}})]$$

$$= -\frac{184}{509956} \cos_{\frac{1}{2}}(6x^{\frac{1}{2}}) - \frac{690}{509956} \sin_{\frac{1}{2}}(6x^{\frac{1}{2}})$$

bulunur.



4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Sonuç olarak bu raporda kesirli mertebeden türev almanın 300 yılı aşkındır kullanıldığı ve bu uygulamalarda kesirli mertebeden türev yöntemlerinden Caputo türev tanımını kullanmanın diğer türev tanımlarına göre daha iyi sonuçlar verdiği üzerinde durulmuştur. Caputo diferansiyel denklemlerinin genel çözümü Mittag-Leffler fonksiyonu aracılığıyla bulunmuş olup Dirichlet sınır ve başlangıç koşullarına tabii dalga denkleminin ise analitik çözümünü değişkenlerine ayırma yöntemiyle bulunmuştur. Son olarak da, sabit katsayılara sahip homojen olmayan FDE'nin özel çözümü kesirli diferansiyel operatör yöntemi aracılığıyla bulunmuştur.

Gelecekteki çalışmalarda bilimsel süreçleri modelleyen ve kesirli diferansiyel denklemler içeren matematiksel modellerin farklı kesirli türevler ve farklı metotlarla analizi yapılarak daha yeni ve daha iyi sonuçlara varılacaktır.

KAYNAKLAR

- Cansız M. (2010). Kesirli Diferensiyel Denklemler ve Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, 276395.
- Caratelli, D. (2019). Incomplete Anger-Weber Functions: A Class of Special Functions for Electromagnetics. *Radio Science*, 54(4), 331-348. DOI: 10.1029/2018RS006750
- Cetinkaya, F.A. (2018). Uyumlu Kesirli Bir Dalga Denklemi Üzerine. *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 22(3), 1110-1113.
- Cetinkaya, S., Demir, A. (2020). Time Fractional Equation With Non-Homogenous Dirichlet Boundary Conditions. *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 24(6), 1185-1190. DOI: 10.16984/aufenbilder.749168
- Cetinkaya, S., Demir, A., Sevindir, H.K. (2019). The Analytic Solution of Initial Periodic Boundary Value Problem Including Sequential Time Fractional Diffusion Equation. *RGN Publications*, 11(1), 173-179. DOI: 10.26713/cma.v11i1.1293
- Cetinkaya, S., Demir, A., Sevindir, H.K. (2020). The Analytic Solution of Initial Boundary Value Problem Including Time Fractional Diffusion Equation. *Facta Universitatis Ser. Math. Inform*, 35(1), 243-252. DOI: 10.22190/FUMI2001243C
- Chaudhry, M.A., Qadir, A., Rafique, M., Zubair, S.M. (1997). Extension of Euler's Beta Function. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 78, 19-32.
- Çavuş M.S. (2006). Kesirli(Fractional) Diferansiyel Denklemler Teorisi ve Dielektrik Durulmanın Kesirli Master Denklemi Yöntemiyle Analizi. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, 197958.
- Değerli K. (2018). Kesirli Mertebeden Türeveler Uygulamalarla Genel Bakış. Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 518840.
- Er N.F. (2015). Kısmi Türevli Kesirli Mertebeden Lineer Schrödinger Denklemlerinin Sayısal Çözümleri. Doktora Tezi, Kültür Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 390441.
- Erman, S. (2020). Solutions of Linear Fractional Differential Equations of Order $n - 1 < nq < n$. *Journal of Scientific Reports-A*, (45), 81-89.
- Karcı A. (2015). Kesir Dereceli Türevin Yeni Yaklaşımının Özellikleri. *Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 30(3), 487-501.
- Lüleci A. (2011). Kesirli Basamaktan Bazı Diferensiyel Denklem Modelleri. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 300897.

- Ordulu E. (2012). Kesirli Hesaplar ve Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 315145.
- Sambandham, B., Vatsala, A.S. (2015). Basic Results for Sequential Caputo Fractional Differential Equations. *Mathematics* 2015, 3, 76-91. DOI: 10.3390/math3010076.
- Soytaş C. (2006). Kesirli Diferensiyel Denklemlerin Çözüm Yöntemleri. Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 183151.
- Sökmen Y. (2012). Genelleştirilmiş Caputo Kesirli Türevi ve Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırşehir, 321474.
- URL-1: https://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/MittagLeffler_1000.gif, (Ziyaret Tarihi: 27 Nisan 2022).
- URL-2: https://mathworld.wolfram.com/images/eps-svg/GammaFunction_1000.svg, (Ziyaret Tarihi: 27 Nisan 2022).
- URL-3: https://tr.wikipedia-on-ipfs.org/wiki/Hata_fonksiyonu, (Ziyaret Tarihi: 14 Mayıs 2022).
- URL-4: https://tr.wikipedia.org/wiki/Beta_fonksiyonu, (Ziyaret Tarihi: 27 Nisan 2022).
- Yu, C-H. (2020). Fractional Derivatives of Some Fractional and Their Applications. *AJAST*, 4(1), 147-158.

KİŞİSEL YAYIN ve ESERLER

Akyol, M., Demir, A., Cetinkaya, S. (2021). On The Solution of Mathematical Problem Including Sequential Time Fractional Wave Equation, *4th International E-Conference On Mathematical Advances and Applications*, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 26-29 Mayıs 2021.



ÖZGEÇMİŞ

Muharrem Akyol ilk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2012 yılında girdiği Marmara Üniversitesi Matematik Bölümü'nden 2016 yılında mezun oldu. 2018 yılında Kocaeli Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. Yüksek lisans eğitiminde kesirli diferansiyel denklemler konusunda çalışmaları bulunmaktadır. Ayrıca, 2016 yılından beri matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

